Statistica inferenziale
Test di ipotesi

Bari, 19 Novembre 2007

Test sulla media

Vogliamo verificare se il valore μ della media di una v.a. X é uguale o diverso da un dato valore μ_0. Quindi vogliamo verificare le seguenti due ipotesi:

$$H_0 : \mu = \mu_0, \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

In questo caso parleremo di **test bilaterale**. Se invece vogliamo verificare se μ é piú grande o piú piccolo di μ_0 allora verificheremo le ipotesi:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0, \quad H_1 : \mu > \mu_0 \quad (H_0 : \mu \geq \mu_0, \quad H_1 : \mu < \mu_0).$$

In questo caso parleremo di **test unilaterale destro** e **sinistro**.

Test bilaterale

A tale scopo, consideriamo un campione casuale $X_1, ..., X_n$ di X. Come stimatore della media consideriamo la media aritmetica del campione $\bar{X}$. Il test consiste nel valutare se il valore osservato di $\bar{X}$ é significativamente diverso da μ_0. Fissato $\delta > 0$, la regione critica prende la forma:

$$D = \{|\bar{X} - \mu_0| > \delta\} = \{\bar{X} < \mu_0 - \delta\} \cup \{\bar{X} > \mu_0 + \delta\}.$$

Se D si verifica, allora rigetteremo H_0 e accetteremo H_1. Il valore di δ si determina fissando a priori il livello α del test:

$$\mathbb{P}\{|\bar{X} - \mu_0| > \delta\} = \alpha \qquad \text{assumendo } H_0 \text{ vera} : \mu = \mu_0.$$

Test bilaterale: σ^2 nota

Supponiamo che $X_k : N(\mu, \sigma^2)$ e che σ^2 sia nota. Allora $\bar{X} : N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ per cui la v.a $U = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ é $N(0,1)$. Quindi per un test bilaterale, nell'ipotesi H_0 vera, si ha:

$$\alpha = \mathbb{P}\{|\bar{X}-\mu_0| > \delta\} = \mathbb{P}\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} = \mathbb{P}\left\{|U_0| > \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}$$

dove la v.a.

$$U_0 = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

é $N(0,1)$.

Test bilaterale: σ^2 nota

Ricordando che se $X : N(0,1)$ segue che $\mathbb{P}\left\{|X| \geq \varphi_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} = \alpha$, allora si ha che: $\frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}} = \varphi_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Quindi la regione critica D di livello α si puó scrivere come:

$$D = \left\{|U_0| > \varphi_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}.$$

Esecuzione del test

1. calcola il valore empirico u_0 di U_0;

2. confronta u_0 con il quantile $\varphi_{1-\frac{\alpha}{2}}$;

3. se $|u_0| > \varphi_{1-\frac{\alpha}{2}}$ allora rigetta H_0 e accetta H_1, altrimenti accetta H_0.

Esecuzione del test

Alternativamente:

1. calcola il valore empirico u_0 di U_0;

2. calcola il livello di significatività del test α_s imponendo $\varphi_{1-\frac{\alpha_s}{2}} = |u_0|$. Per definizione di quantile si ha: $\Phi(|u_0|) = 1 - \frac{\alpha_s}{2}$, da cui: $\alpha_s = 2[1 - \Phi(|u_0|)]$;

3. se $\alpha_s \leq \alpha$ allora rigetta H_0 e accetta H_1, altrimenti accetta H_0.

Esempio

Vogliamo stabilire se l'etá media di una popolazione é diversa da 30 anni, nell'ipotesi che $\sigma^2 = 20$. Allora estraiamo un campione casuale di $n = 10$ individui e otteniamo un valore di $\bar{x} = 27$. Le ipotesi da verificare sono:

$$H_0 : \mu = 30 \qquad\qquad H_1 : \mu \neq 30$$

Calcoliamo il valore della statistica U nel caso H_0 vera:

$$u_0 = \frac{\bar{x} - 30}{\sqrt{20}/\sqrt{10}} = -2.12$$

Inoltre, per $\alpha = 0.05$, si ha $\varphi_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$. Poiché $|u_0| > 1.96$ allora rigettiamo H_0 e concludiamo che l'etá media della popolazione é diversa da 30 anni.

Esempio

Calcoliamo il p-value:

$$\alpha_s = 2[1 - \Phi(|u_0|)] = 2(1 - 0.983) = 0.034$$

Essendo $\alpha_s \leq \alpha$ allora rigetto H_0.

Regione critica

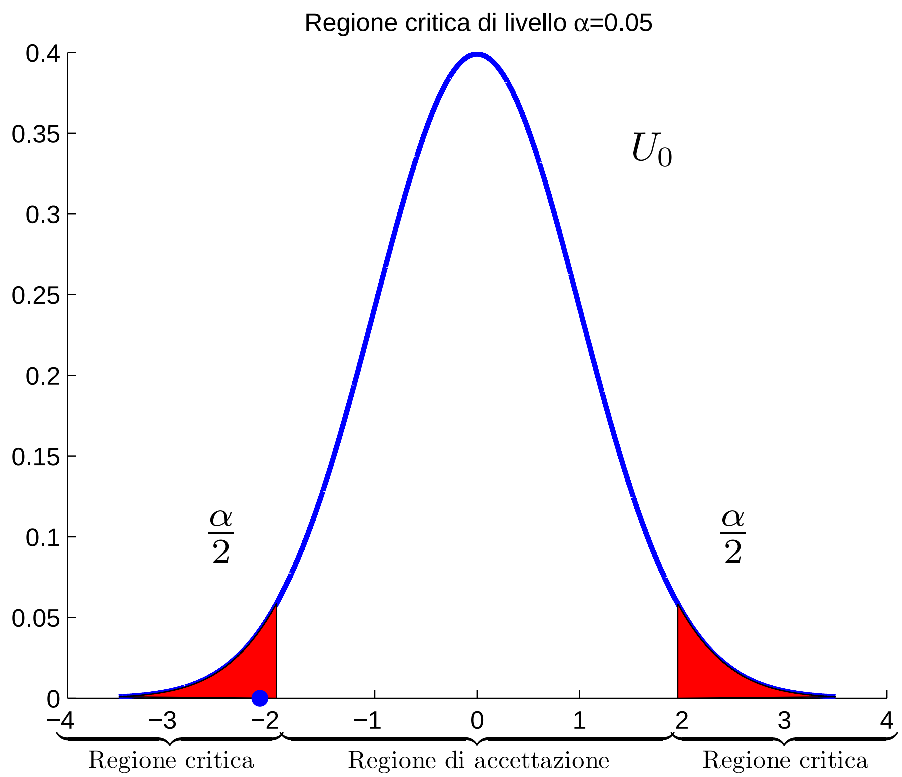

Figure 1: Regione critica.

Significativitá

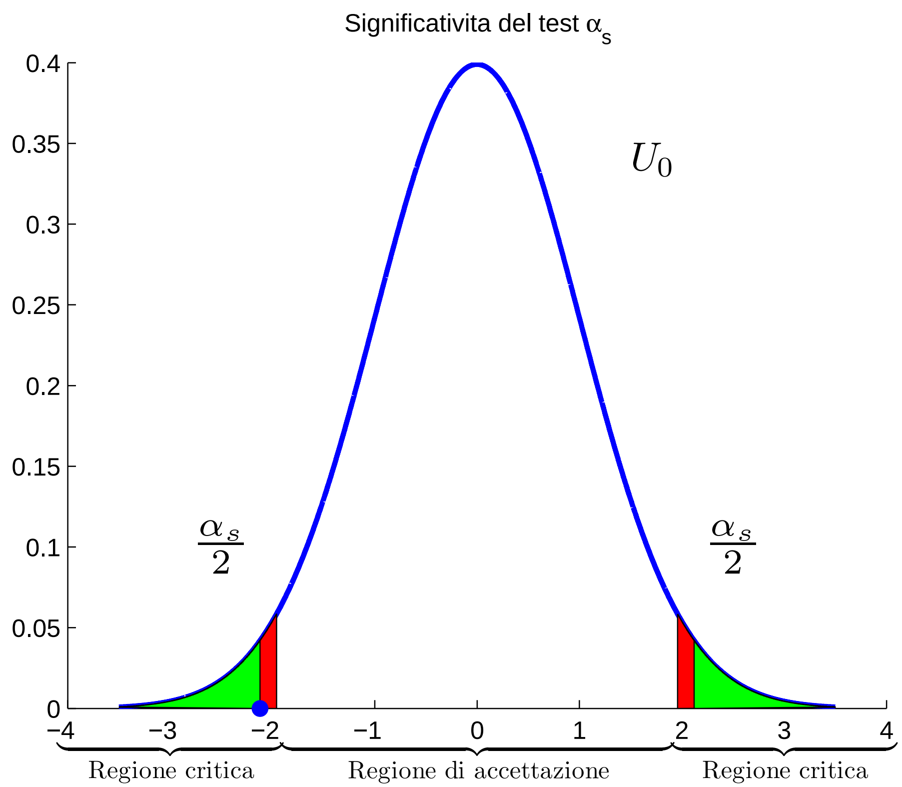

Figure 2: Significativitá del test.

Test unilaterale destro

In questo caso la regione critica assume la forma:

$$D = \{\bar{X} - \mu_0 > \delta\} = \{\bar{X} > \mu_0 + \delta\}$$

in quanto vogliamo verificare se μ é piú grande di μ_0. Se tale differenza é molto piú grande di un $\delta > 0$ allora rigetteremo H_0 in favore di H_1. Il valore di δ si determina fissando a priori il livello α del test:

$$\mathbb{P}\{\bar{X} - \mu > \delta\} = \alpha \qquad\qquad \text{assumendo } H_0 \text{ vera} : \mu \leq \mu_0.$$

Test unilaterale destro: σ^2 nota

Analogamente per un test unilaterale destro di livello α, nell'ipotesi H_0 vera, si ha:

$$\alpha = \mathbb{P}\{\bar{X}-\mu > \delta\} = \mathbb{P}\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} = \mathbb{P}\left\{U > \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}$$

dove $U = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ é $N(0,1)$. Poiché:

$$\mathbb{P}\left\{U \leq \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} = 1 - \mathbb{P}\left\{U > \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha,$$

allora per definizione di quantile si ha:

$$\varphi_{1-\alpha} = \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Quindi la regione critica D di livello α si puó scrivere come:

$$D = \{U_0 > \varphi_{1-\alpha}\},$$

dove:

$$U_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Esecuzione del test

1. calcola il valore empirico u_0 di U_0;

2. confronta u_0 con il quantile $\varphi_{1-\alpha}$;

3. se $u_0 > \varphi_{1-\alpha}$ allora rigetta H_0 e accetta H_1, altrimenti accetta H_0.

Esecuzione del test

Alternativamente:

1. calcola il valore empirico u_0 di U_0;

2. calcola il livello di significativitá del test α_s imponendo $\varphi_{1-\alpha_s} = u_0$. Per definizione di quantile si ha: $\Phi(u_0) = 1 - \alpha_s$, da cui: $\alpha_s = 1 - \Phi(u_0)$;

3. se $\alpha_s \leq \alpha$ allora rigetta H_0 e accetta H_1, altrimenti accetta H_0.

Esempio

Nelle ipotesi dell'esempio precedente, osserviamo un valore di $\bar{x} = 33$. Possiamo concludere che $\mu > 30$? Le ipotesi da verificare sono:

$$H_0 : \mu \leq 30 \qquad\qquad H_1 : \mu > 30$$

Calcoliamo il valore della statistica U nel caso H_0 vera:

$$u_0 = \frac{\bar{x}-30}{\sqrt{20}/\sqrt{10}} = 2.12$$

Inoltre, per $\alpha = 0.05$, si ha $\varphi_{1-\alpha} = 1.645$. Poiché $u_0 > 1.645$ allora rigettiamo H_0 e concludiamo che l'etá media della popolazione é maggiore di 30 anni. Inoltre $\alpha_s = 1 - \Phi(u_0) = 0.017$.

Regione critica

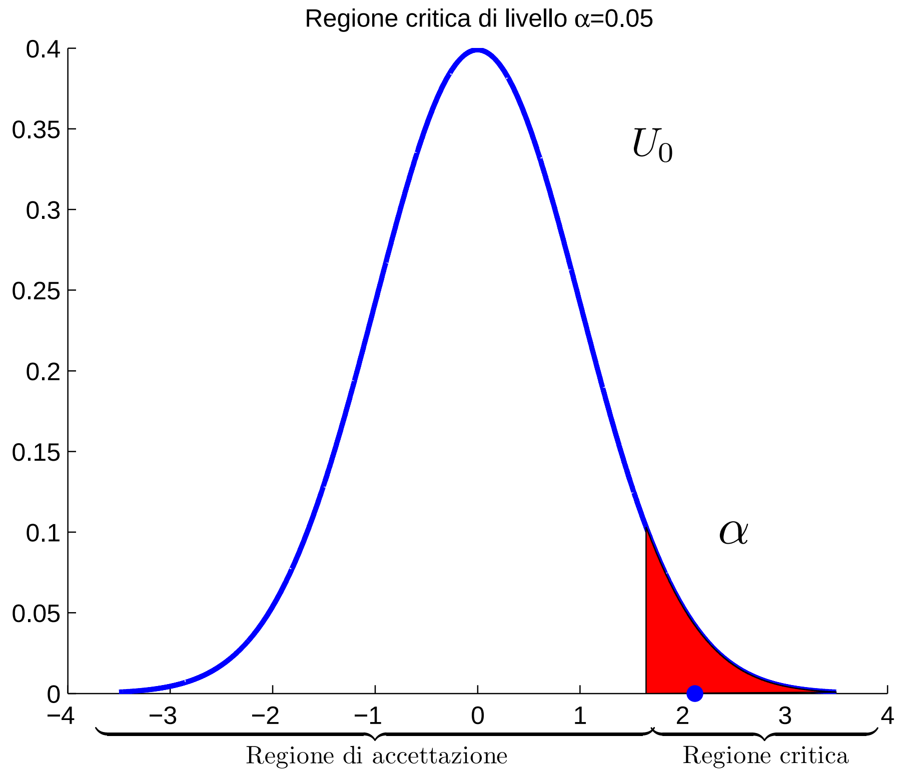

Figure 3: Regione critica test unilaterale destro.

Significativitá

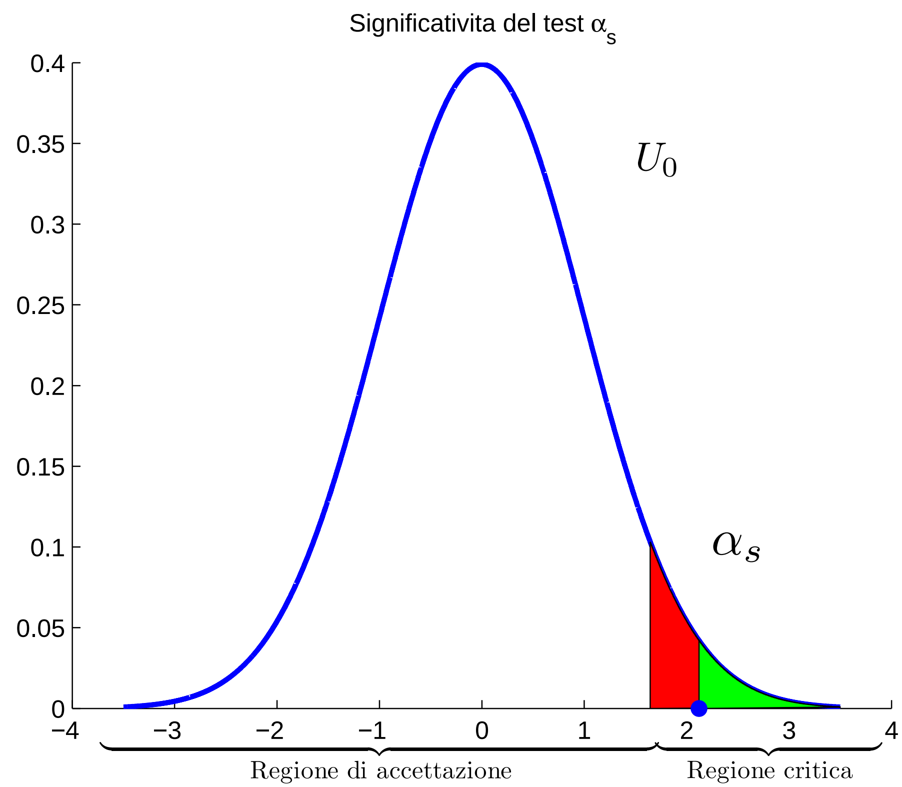

Figure 4: Significativitá del test unilaterale destro.

Test bilaterale: σ^2 non nota

Supponiamo che $X_k : N(\mu, \sigma^2)$ e che σ^2 non sia nota. Allora $\bar{X} : N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. Inoltre stimiamo σ^2 attraverso lo stimatore:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \bar{X}\right)^2$$

e ricordiamo che la v.a. $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ é una Student con $n-1$ gradi di libertá $t(n-1)$. Quindi per un test bilaterale, nell'ipotesi H_0 vera, si ha:

$$\alpha = \mathbb{P}\{|\bar{X}-\mu_0| > \delta\} = \mathbb{P}\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| > \frac{\delta}{S/\sqrt{n}}\right\} = \mathbb{P}\left\{|T_0| > \frac{\delta}{S/\sqrt{n}}\right\}$$

dove la v.a.

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

é una $t(n-1)$. Ricordando che se T é $t(n-1)$ allora $\mathbb{P}\left\{|T| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\} = \alpha$, possiamo concludere che:

$$\frac{\delta}{S/\sqrt{n}} = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1).$$

Quindi la regione critica D di livello α si puó scrivere come:

$$D = \left\{|T_0| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}.$$

Esecuzione del test

1. calcola il valore empirico t_0 di T_0;

2. confronta t_0 con il quantile $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$;

3. se $|t_0| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ allora rigetta H_0 e accetta H_1, altrimenti accetta H_0.

Esecuzione del test

Alternativamente:

1. calcola il valore empirico t_0 di T_0;

2. calcola il livello di significativitá del test α_s imponendo $t_{1-\frac{\alpha_s}{2}}(n-1) = |t_0|$. Per definizione di quantile si ha: $F_{n-1}(|t_0|) = 1 - \frac{\alpha_s}{2}$, da cui: $\alpha_s = 2[1 - F_{n-1}(|t_0|)]$, dove F_{n-1} é la c.d.f. di una t di Student $t(n-1)$;

3. se $\alpha_s \leq \alpha$ allora rigetta H_0 e accetta H_1, altrimenti accetta H_0.

Esempio

Sia dato l'indice di massa corporeo BMI=peso(Kg)/statura^2(m^2) di 14 soggetti. Vogliamo stabilire se la media della popolazione da cui il campione é stato estratto é diversa da 35.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
23	25	21	37	39	21	23	24	32	57	23	26	31	45

Le ipotesi da verificare sono:

$$H_0 : \mu = 35, \qquad H_1 : \mu \neq 35$$

Esempio

Assumiamo che BMI sia $N(\mu, \sigma^2)$. Stimiamo μ e σ^2 attraverso gli stimatori $\bar{X}$ e S^2. Otteniamo: $\bar{x} = 30.5$ e $s = 10.64$. Quindi:

$$t_0 = \frac{30.5 - 35}{10.64/\sqrt{14}} = \frac{-4.5}{2.84} = -1.58.$$

Per $\alpha = 0.05$, essendo il test bilaterale, dobbiamo confrontare $|t_0|$ con il quantile $t_{0.975}(13) = 2.16$. Poiché $|t_0| \not> t_{0.975}(13)$, allora non possiamo rigettare H_0 e quindi dobbiamo concludere che la media della popolazione da cui é stato estratto il campione puó essere uguale a 35.

Test unilaterale destro: σ^2 non nota

Analogamente per un test unilaterale destro di livello α, nell'ipotesi H_0 vera, si ha:

$$\alpha = \mathbb{P}\{\bar{X}-\mu > \delta\} = \mathbb{P}\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} > \frac{\delta}{S/\sqrt{n}}\right\} = \mathbb{P}\left\{T > \frac{\delta}{S/\sqrt{n}}\right\}$$

dove $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ é una Student con $n-1$ gradi di libertá $t(n-1)$. Poiché:

$$\mathbb{P}\left\{T \leq \frac{\delta}{S/\sqrt{n}}\right\} = 1 - \mathbb{P}\left\{T > \frac{\delta}{S/\sqrt{n}}\right\} = 1-\alpha,$$

allora per definizione di quantile si ha:

$$t_{1-\alpha}(n-1) = \frac{\delta}{S/\sqrt{n}}.$$

Quindi la regione critica D di livello α si puó scrivere come:

$$D = \{T_0 > t_{1-\alpha}(n-1)\},$$

dove:

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}.$$

Esecuzione del test

1. calcola il valore empirico t_0 di T_0;

2. confronta t_0 con il quantile $t_{1-\alpha}(n-1)$;

3. se $t_0 > t_{1-\alpha}(n-1)$ allora rigetta H_0 e accetta H_1, altrimenti accetta H_0.

Esecuzione del test

Alternativamente:

1. calcola il valore empirico t_0 di T_0;

2. calcola il livello di significativitá del test α_s imponendo $t_{1-\alpha_s}(n-1) = t_0$. Per definizione di quantile si ha: $F_{n-1}(t_0) = 1 - \alpha_s$, da cui: $\alpha_s = 1 - F_{n-1}(t_0)$, dove F_{n-1} é la c.d.f. di una Student $t(n-1)$;

3. se $\alpha_s \leq \alpha$ allora rigetta H_0 e accetta H_1, altrimenti accetta H_0.