Statistica inferenziale
Test di ipotesi

Bari, 17 Dicembre 2007

ANalysis Of VAriance (ANOVA)

In questo test vogliamo confrontare i valori $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ delle medie di k v.a. $X_1, X_2, ..., X_k$ per stabilire se esse sono uguali o diverse.

L'ipotesi nulla consiste nell'assumere che tutte le medie sono uguali, quella alternativa consiste nell'assumere che esiste almeno una coppia di medie differenti. Quindi vogliamo testare:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$$

contro

$$H_1 : \text{almeno due delle } \mu_j \text{ differiscono.}$$

Esempio

Vogliamo conoscere se tre farmaci hanno effetti statisticamente differenti nell'abbassare il livello di colesterolo negli individui.

Vogliamo determinare i geni differenzialmente espressi nel rene, polmone, colon.

Osservazione

Possiamo testare la differenza tra tutte le possibili coppie di medie con t-test?

Consideriamo 5 popolazioni. Il procedimento é laborioso in quanto dovremmo eseguire $\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = 10$ t-test.

Inoltre potremmo arrivare a conclusioni errate. Infatti, supponiamo che tutte le popolazioni abbiano la stessa media μ (ossia H_0 vera). Estraiamo 5 campioni ed effettuiamo 10 t-test con livello $\alpha = 0.05$. In ogni test, la probabilitá di commettere un errore é:

$$\alpha = \mathbb{P}\{\text{rigettare} H_0 | H_0 \text{vera}\}.$$

Osservazione (cont.)

Detto E il numero di errori che si commettono in 10 test, nell'ipotesi di indipendenza dei test, calcoliamo:

$$\mathbb{P}\{E \geq 1\} = 1-\mathbb{P}\{E = 0\} = 1-\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}\alpha^0(1-\alpha)^{10} = 1-(1-\alpha)^{10},$$

da cui $\mathbb{P}\{E \geq 1\} = 0.4013$. Quindi abbiamo una probabilitá del 40% di commettere almeno un errore. Inoltre l'ipotesi di indipendenza dei test é falsa, in quanto i test sono effettuati sugli stessi dati.

Derivazione

Consideriamo k v.a. $X_1, X_2, ..., X_k$ tali che $X_j : N(\mu_j, \sigma^2)$. Di ciascuna v.a. X_j supponiamo di avere un campione casuale costituito da n_j osservazioni che indichiamo con

$$X_{ij},\ i = 1, 2, ..., n_j.$$

Osserviamo che le n_j osservazioni della v.a. X_j per $j = 1, 2, ..., k$ sono indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione $N(\mu_j, \sigma^2)$.

Derivazione (cont.)

In particolare si ha:

$$\begin{array}{c|c|c|c}
X_1 & X_2 & \ldots & X_k \\
\hline
X_{11} & X_{12} & \ldots & X_{1k} \\
X_{21} & X_{22} & \ldots & X_{2k} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
X_{n_1 1} & X_{n_2 2} & \ldots & X_{n_k k}
\end{array} .$$

Osserva che per ogni v.a. possiamo avere un diverso numero di osservazioni.

Nel seguito $j = 1, 2, ..., k$ e $i = 1, 2, ..., n_j$.

Derivazione (cont.)

Ogni realizzazione X_{ij} della v.a. X_j puó essere scritta come scostamento dalla sua media μ_j, ossia:

$$X_{ij} = \mu_j + \epsilon_{ij}. \tag{1}$$

Poiché $X_{ij} : N(\mu_j, \sigma^2)$, allora gli scarti $\epsilon_{ij} : N(0, \sigma^2)$.

Derivazione (cont.)

Allo stesso modo, detta μ la media totale di tutte le medie:

$$\mu = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \mu_j,$$

allora la media μ_j di ogni v.a. si puó scrivere come scostamento da μ, ossia:

$$\mu_j = \mu + \tau_j. \tag{2}$$

Sostituendo la (2) in (1) si ha:

$$X_{ij} = \mu + \tau_j + \epsilon_{ij}. \tag{3}$$

Derivazione (cont.)

Calcoliamo la somma $T_{.j}$ e la media $\overline{X}_{.j}$ delle osservazioni X_{ij} della v.a. X_j:

$$T_{.j} = \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij} \qquad e \qquad \overline{X}_{.j} = \frac{T_{.j}}{n_j}.$$

Analogamente, calcoliamo la somma $T_{..}$ e la media $\overline{X}_{..}$ delle osservazioni X_{ij} di tutte le k v.a.:

$$T_{..} = \sum_{j=1}^{k} T_{.j} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij} \qquad e \qquad \overline{X}_{..} = \frac{\sum_{j=1}^{k} T_{.j}}{\sum_{j=1}^{k} n_j}.$$

Derivazione (cont.)

Riportiamo in tabella le quantitá fin qui calcolate:

X_1	X_2	$\ldots$	X_k	Totale
X_{11}	X_{12}	$\ldots$	X_{1k}	
X_{21}	X_{22}	$\ldots$	X_{2k}	
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
$X_{n_1 1}$	$X_{n_2 2}$	$\ldots$	$X_{n_k k}$	
$T_{.1}$	$T_{.2}$	$\ldots$	$T_{.k}$	$T_{..}$
$\overline{X}_{.1}$	$\overline{X}_{.2}$	$\ldots$	$\overline{X}_{.k}$	$\overline{X}_{..}$

.

Derivazione (cont.)

Calcoliamo ora la somma dei quadrati degli scarti tra le singole osservazioni X_{ij} e la media $\overline{X}_{..}$ di tutte le osservazioni:

$$SST = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \overline{X}_{..})^2$$

Osserva che nell'ipotesi H_0 vera $(\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k = \mu)$ tutte le k v.a. hanno la stessa pdf, ossia hanno distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$. In questa ipotesi, l'intero insieme di osservazioni costituisce un campione estratto da una stessa distribuzione e la quantitá SST corrisponde al numeratore della stima della varianza.

Formula alternativa di SST

$$SST = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}^2 - 2X_{ij}\overline{X}_{..} + \overline{X}_{..}^2$$

$$SST = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}^2 - 2\overline{X}_{..} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij} + N\overline{X}_{..}^2 \quad (*)^1$$

$$SST = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}^2 - 2N\overline{X}_{..}^2 + N\overline{X}_{..}^2 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}^2 - N\overline{X}_{..}^2$$

$$SST = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{N}.$$

[1] Dove $n_1 + n_2 + ... + n_k = N$.

Derivazione (cont.)

Aggiungendo e sottraendo $\overline{X}_{.j}$ si ottiene:

$$
\begin{aligned}
SST &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij} - \overline{X}_{.j} + \overline{X}_{.j} - \overline{X}_{..})^2 \\
SST &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij} - \overline{X}_{.j})^2 + 2\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij} - \overline{X}_{.j})(\overline{X}_{.j} - \overline{X}_{..}) + \\
&\quad \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(\overline{X}_{.j} - \overline{X}_{..})^2.
\end{aligned}
$$

Derivazione (cont.)

Dimostriamo che il doppio prodotto é nullo. Infatti:

$$2\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X}_{.j})(\overline{X}_{.j}-\overline{X}_{..}) = 2\sum_{j=1}^{k}(\overline{X}_{.j}-\overline{X}_{..})\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X}_{.j}) =$$

$$2\sum_{j=1}^{k}(\overline{X}_{.j}-\overline{X}_{..})\left(\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij}-\sum_{i=1}^{n_j}\overline{X}_{.j}\right) =$$ [2]

$$2\sum_{j=1}^{k}(\overline{X}_{.j}-\overline{X}_{..})(n_j\overline{X}_{.j}-n_j\overline{X}_{.j}) = 0.$$

[2] Ricorda che $\overline{X}_{.j} = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}$.

Derivazione (cont.)

Quindi abbiamo dimostrato che:

$$SST = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \overline{X}_{.j})^2 + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (\overline{X}_{.j} - \overline{X}_{..})^2,$$

ossia:

$$SST = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \overline{X}_{.j})^2 + \sum_{j=1}^{k} n_j (\overline{X}_{.j} - \overline{X}_{..})^2.$$

Osservazione

Analizziamo il termine $\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X}_{.j})^2$. In ogni gruppo j si calcola la somma degli scostamenti al quadrato tra ogni singola osservazione X_{ij} e la media campionaria del gruppo $\overline{X}_{.j}$. Successivamente si sommano queste quantitá su tutti i k gruppi. Questa somma si chiama *somma dei quadrati entro i gruppi* e si denota con SSW.

Analizziamo il termine $\sum_{j=1}^{k} n_j(\overline{X}_{.j} - \overline{X}_{..})^2$. Esso é costituito dalla somma degli scostamenti al quadrato tra ogni media $\overline{X}_{.j}$ e la media dell'intero campione $\overline{X}_{..}$, dove ogni addendo é moltiplicato per la cardinalitá del gruppo. Questa somma si chiama *somma dei quadrati tra i gruppi* e si denota con SSA.

Formula alternativa di SSW

$$SSW = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij} - \overline{X}_{.j})^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}^2 - 2X_{ij}\overline{X}_{.j} + \overline{X}_{.j}^2$$

$$SSW = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}^2 - 2\sum_{j=1}^{k}\overline{X}_{.j}\sum_{i=1}^{n_j} X_{ij} + \sum_{j=1}^{k}\overline{X}_{.j}^2\sum_{i=1}^{n_j} 1$$

$$SSW = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}^2 - 2\sum_{j=1}^{k} n_j\overline{X}_{.j}^2 + \sum_{j=1}^{k} n_j\overline{X}_{.j}^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}^2 - \sum_{j=1}^{k} n_j\overline{X}_{.j}^2$$

$$SSW = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}^2 - \sum_{j=1}^{k}\frac{T_{.j}^2}{n_j}.$$

Formula alternativa di SSA

$$SSA = \sum_{j=1}^{k} n_j (\overline{X}_{.j} - \overline{X}_{..})^2 = \sum_{j=1}^{k} n_j \left(\overline{X}_{.j}^2 - 2\overline{X}_{.j}\overline{X}_{..} + \overline{X}_{..}^2 \right)$$

$$SSA = \sum_{j=1}^{k} n_j \overline{X}_{.j}^2 - 2\overline{X}_{..} \sum_{j=1}^{k} n_j \overline{X}_{.j} + \overline{X}_{..}^2 \sum_{j=1}^{k} n_j$$

$$SSA = \sum_{j=1}^{k} \frac{T_{.j}^2}{n_j} - 2\frac{T_{..}}{N} \sum_{j=1}^{k} T_{.j} + N\frac{T_{..}^2}{N^2} = \sum_{j=1}^{k} \frac{T_{.j}^2}{n_j} - 2\frac{T_{..}^2}{N} + \frac{T_{..}^2}{N}$$

$$SSA = \sum_{j=1}^{k} \frac{T_{.j}^2}{n_j} - \frac{T_{..}^2}{N}.$$

Osservazione

In definitiva possiamo scrivere che:

$$SST = SSW + SSA.$$

Calcoleremo due stime S_X^2 e $S_{X_0}^2$ della varianza σ^2 sotto condizioni differenti che faranno uso delle somme SSW e SSA.

Derivazione (cont.)

All'interno di ogni campione, la quantitá

$$S_j^2 = \frac{1}{(n_j - 1)} \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \overline{X}_{.j})^2$$

é una stima non distorta della varianza σ_j^2 della popolazione X_j. Poiché, per ipotesi, tutte le k v.a. X_j hanno la stessa varianza σ^2, allora possiamo considerare le stime S_j^2 come k realizzazioni di una stessa v.a. e quindi possiamo considerare la media campionaria (pesata) di queste realizzazioni per stimare σ^2.

Derivazione (cont.)

Allora consideriamo la statistica:

$$S_X^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2 + ... + (n_k-1)S_k^2}{(n_1-1)+(n_2-1)+...+(n_k-1)} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)S_j^2}{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)}$$

$$S_X^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X}_{.j})^2}{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)}. \tag{4}$$

Questa é la prima stima di σ^2. Osserva che S_X^2 é stata ottenuta sfruttando l'ipotesi che tutte le v.a. X_j hanno la stessa varianza. Inoltre S_X^2 é una stima non distorta di σ^2 indipendentemente dal fatto che H_0 sia vera o falsa.

Derivazione (cont.)

Vediamo come ottenere una seconda stima di σ^2. Infatti, supponiamo che H_0 sia vera, ossia che le medie μ_j delle k v.a. X_j siano tutte uguali tra loro: $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k = \mu$. In questa ipotesi tutte le osservazioni X_{ij} possono essere considerate come realizzazioni di una stessa v.a. $X : N(\mu, \sigma^2)$.

Supponiamo inoltre che le dimensioni n_j dei diversi gruppi siano uguali: $n_1 = n_2 = ... = n_k = n$. In queste ipotesi, le medie campionarie $\overline{X}_{.1}, \overline{X}_{.2}, ..., \overline{X}_{.k}$ possono essere considerate come k osservazioni della v.a.: media campionaria $\overline{X}$ su n osservazioni.

Derivazione (cont.)

Una stima non distorta di $\mathbb{E}(\overline{X})$ é la media aritmetica di $\overline{X}_{.1}, \overline{X}_{.2}, ..., \overline{X}_{.k}$, ossia:

$$\frac{\sum_{j=1}^{k} \overline{X}_{.j}}{k} = \frac{\sum_{j=1}^{k} n\overline{X}_{.j}}{nk} =^{3} \frac{\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}}{\sum_{j=1}^{k} n_j} = \overline{X}_{..}$$

che é la media di tutte le osservazioni.

[3] Ricorda che $\overline{X}_{.j} = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}$ e che $n_1 = n_2 = ... = n_k = n$.

Derivazione (cont.)

Inoltre, una stima non distorta di $Var(\overline{X})$ é data da:

$$S^2_{\overline{X}} = \frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k}(\overline{X}_{.j} - \overline{X}_{..})^2.$$

Ma abbiamo dimostrato che $Var(\overline{X})$ é legata alla varianza σ^2 della X dalla relazione:

$$Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Derivazione (cont.)

Quindi una seconda stima della varianza σ^2 dell'intera popolazione ottenuta sotto H_0 vera é:

$$S^2_{X_0} = \frac{n}{k-1}\sum_{j=1}^{k}(\overline{X}_{.j} - \overline{X}_{..})^2.$$

Quando le dimensioni campionarie non sono tutte uguali, una stima di σ^2 é data da:

$$S^2_{X_0} = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j(\overline{X}_{.j} - \overline{X}_{..})^2}{k-1}. \qquad (5)$$

Rapporto delle stime delle varianze

Se H_0 é vera, ci aspettiamo che le due stime S_X^2 e $S_{X_0}^2$ di σ^2 siano quasi uguali e quindi il loro rapporto prossimo ad 1. Calcoliamo allora il rapporto:

$$F = \frac{S_{X_0}^2}{S_X^2}$$

Per testare l'ipotesi H_0 di uguaglianza delle medie, testiamo l'ipotesi:

$$H_0' : F = 1 \text{ contro } H_1' : F > 1$$

In quanto $S_{X_0}^2$ é maggiore nel caso di H_1 vera rispetto al caso di H_0 vera.

Distribuzione del rapporto F

Per un teorema precedente sappiamo che le v.a.

$$\frac{(k-1)S^2_{X_0}}{\sigma^2} : \chi^2(k-1), \qquad \frac{\left(\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\right) S^2_X}{\sigma^2} : \chi^2\left(\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\right)$$

Indicato con $\sum_{j=1}^{k}(n_j-1) = \sum_{j=1}^{k} n_j - k = N - k$, allora:

$$\frac{(k-1)S^2_{X_0}}{\sigma^2} : \chi^2(k-1), \qquad \frac{(N-k)\, S^2_X}{\sigma^2} : \chi^2\,(N-k)$$

Distribuzione del rapporto F

Per un teorema precedente possiamo affermare che la v.a.

$$F = \frac{\frac{(k-1)S^2_{X_0}}{\sigma^2}/(k-1)}{\frac{(N-k)S^2_X}{\sigma^2}/(N-k)} = \frac{S^2_{X_0}}{S^2_X}$$

segue la legge di Fisher $F(k-1, N-k)$. Analogamente

$$F = \frac{SSA/(k-1)}{SSW/(N-k)} = \frac{(N-k)SSA}{(k-1)SSW}$$

segue la legge di Fisher $F(k-1, N-k)$.

Regione critica del test ANOVA

Fissato un livello α, nell'ipotesi H_0 vera, determiniamo il valore critico del test F_0:

$$\alpha = \mathbb{P}\{F > F_0\}$$

Sapendo che

$$1 - \alpha = \mathbb{P}\{F \leq F_0\} = \mathbb{P}\{F \leq f_{1-\alpha}(k-1, N-K)\}$$

allora la regione critica di livello α é:

$$D = \{F > f_{1-\alpha}(k-1, N-K)\}.$$

Esecuzione del test

1. calcola il valore empirico f di F;

2. confronta f con il quantile $f_{1-\alpha}(k-1, N-K)$;

3. se $f > f_{1-\alpha}(k-1, N-K)$ allora rigetta H_0 e accetta H_1, altrimenti accetta H_0.

Esempio

	Non trattati	Estrogeno	Progesterone	Estr+Prog	
	117	440	605	2664	
	124	264	626	2078	
	40	221	385	3584	
	88	136	475	1540	
	40			1840	
Totale	409	1061	2091	11706	15267
Media	81.80	265.25	522.75	2341.20	848.1667

Livelli di concentrazione sierica di progesterone misurato in animali nel periodo compreso tra i 14 ed i 25 giorni dopo il trattamento. Si vuole sapere se i trattamenti hanno effetto sulla concentrazione sierica media di progesterone.

Esempio

Calcoliamo il valore della statistica F per il nostro campione $(k = 4, n_1 = 5, n_2 = 4, n_3 = 4, n_4 = 5, N = 18.)$:

$$SST = 117^2 + 124^2 + ... + 440^2 + 264^2 + ... + 2664^2 + 2078^2 + ... + 1840^2 - 15267^2/18$$

$$SST = 18570668.5$$

$$SSA = \frac{409^2}{5} + \frac{1061^2}{4} + \frac{2091^2}{4} + \frac{11706^2}{4} - \frac{15267^2}{18} \Rightarrow SSA = 15865083.4$$

$$SSW = SST - SSA = 2705585.1$$

$$f = \frac{SSA/3}{SSW/14} = 27.3645$$

Per $\alpha = 0.05$, questo valore deve essere confrontato con il quantile $f_{0.95}(3, 14) = 3.34$. Poiché f é maggiore del valore critico di F allora rigettiamo H_0.

Legge di Fisher F(n,m)

$\alpha = 0.950$

	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	60	∞
m																
3		10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.70	8.66	8.62	8.57	8.53
4		7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.86	5.80	5.75	5.69	5.63
5		6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.62	4.56	4.50	4.43	4.37
6		5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	3.94	3.87	3.81	3.74	3.67
7		5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.51	3.44	3.38	3.30	3.23
8		5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.22	3.15	3.08	3.01	2.93
9		5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.01	2.94	2.86	2.79	2.71
10		4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.85	2.77	2.70	2.62	2.54
11		4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.72	2.65	2.57	2.49	2.40
12		4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.62	2.54	2.47	2.38	2.30
13		4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.53	2.46	2.38	2.30	2.21
14		4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.46	2.39	2.31	2.22	2.13
15		4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.40	2.33	2.25	2.16	2.07
16		4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.35	2.28	2.19	2.11	2.01
17		4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.31	2.23	2.15	2.06	1.96
18		4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.27	2.19	2.11	2.02	1.92
19		4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.23	2.16	2.07	1.98	1.88
20		4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.20	2.12	2.04	1.95	1.84
21		4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.18	2.10	2.01	1.92	1.81
22		4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.15	2.07	1.98	1.89	1.78
23		4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.13	2.05	1.96	1.86	1.76
24		4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.11	2.03	1.94	1.84	1.73
25		4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.09	2.01	1.92	1.82	1.71
26		4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.07	1.99	1.90	1.80	1.69
27		4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.06	1.97	1.88	1.79	1.67
28		4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.04	1.96	1.87	1.77	1.65
29		4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.03	1.94	1.85	1.75	1.64
30		4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.01	1.93	1.84	1.74	1.62
31		4.16	3.30	2.91	2.68	2.52	2.41	2.32	2.25	2.20	2.15	2.00	1.92	1.83	1.73	1.61
32		4.15	3.29	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19	2.14	1.99	1.91	1.82	1.71	1.59
33		4.14	3.28	2.89	2.66	2.50	2.39	2.30	2.23	2.18	2.13	1.98	1.90	1.81	1.70	1.58
34		4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17	2.12	1.97	1.89	1.80	1.69	1.57
35		4.12	3.27	2.87	2.64	2.49	2.37	2.29	2.22	2.16	2.11	1.96	1.88	1.79	1.68	1.56
36		4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15	2.11	1.95	1.87	1.78	1.67	1.55
37		4.11	3.25	2.86	2.63	2.47	2.36	2.27	2.20	2.14	2.10	1.95	1.86	1.77	1.66	1.54
38		4.10	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	2.09	1.94	1.85	1.76	1.65	1.53
39		4.09	3.24	2.85	2.61	2.46	2.34	2.26	2.19	2.13	2.08	1.93	1.85	1.75	1.65	1.52
40		4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	1.92	1.84	1.74	1.64	1.51
60		4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.84	1.75	1.65	1.53	1.39
120		3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.75	1.66	1.55	1.43	1.25
∞		3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.67	1.57	1.46	1.32	1.00

Legge di Fisher F(n,m)

$\alpha = 0.975$

	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	60	∞
m																
4		12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.66	8.56	8.46	8.36	8.26
5		10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.43	6.33	6.23	6.12	6.02
6		8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.27	5.17	5.07	4.96	4.85
7		8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.57	4.47	4.36	4.25	4.14
8		7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.10	4.00	3.89	3.78	3.67
9		7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.77	3.67	3.56	3.45	3.33
10		6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.52	3.42	3.31	3.20	3.08
11		6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.33	3.23	3.12	3.00	2.88
12		6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.18	3.07	2.96	2.85	2.72
13		6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.05	2.95	2.84	2.72	2.60
14		6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	2.95	2.84	2.73	2.61	2.49
15		6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.86	2.76	2.64	2.52	2.40
16		6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.79	2.68	2.57	2.45	2.32
17		6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.72	2.62	2.50	2.38	2.25
18		5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.67	2.56	2.44	2.32	2.19
19		5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.62	2.51	2.39	2.27	2.13
20		5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.57	2.46	2.35	2.22	2.09
21		5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.53	2.42	2.31	2.18	2.04
22		5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.50	2.39	2.27	2.14	2.00
23		5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.47	2.36	2.24	2.11	1.97
24		5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.44	2.33	2.21	2.08	1.94
25		5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.41	2.30	2.18	2.05	1.91
26		5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.39	2.28	2.16	2.03	1.88
27		5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.36	2.25	2.13	2.00	1.85
28		5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.34	2.23	2.11	1.98	1.83
29		5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.32	2.21	2.09	1.96	1.81
30		5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.31	2.20	2.07	1.94	1.79
31		5.55	4.16	3.57	3.23	3.01	2.85	2.73	2.64	2.56	2.50	2.29	2.18	2.06	1.92	1.77
32		5.53	4.15	3.56	3.22	3.00	2.84	2.71	2.62	2.54	2.48	2.28	2.16	2.04	1.91	1.75
33		5.51	4.13	3.54	3.20	2.98	2.82	2.70	2.61	2.53	2.47	2.26	2.15	2.03	1.89	1.73
34		5.50	4.12	3.53	3.19	2.97	2.81	2.69	2.59	2.52	2.45	2.25	2.13	2.01	1.88	1.72
35		5.48	4.11	3.52	3.18	2.96	2.80	2.68	2.58	2.50	2.44	2.23	2.12	2.00	1.86	1.70
36		5.47	4.09	3.50	3.17	2.94	2.78	2.66	2.57	2.49	2.43	2.22	2.11	1.99	1.85	1.69
37		5.46	4.08	3.49	3.16	2.93	2.77	2.65	2.56	2.48	2.42	2.21	2.10	1.97	1.84	1.67
38		5.45	4.07	3.48	3.15	2.92	2.76	2.64	2.55	2.47	2.41	2.20	2.09	1.96	1.82	1.66
39		5.43	4.06	3.47	3.14	2.91	2.75	2.63	2.54	2.46	2.40	2.19	2.08	1.95	1.81	1.65
40		5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.18	2.07	1.94	1.80	1.64
60		5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.06	1.94	1.82	1.67	1.48
120		5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	1.94	1.82	1.69	1.53	1.31
∞		5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.83	1.71	1.57	1.39	1.00